

**PLANTEAMIENTO MULTIOBJETIVO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE
RUTEO DE VEHICULOS CON RESTRICCIONES DE CAPACIDAD**

LILIBETH QUIÑONES SAAVEDRA

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
PROYECTO DE GRADO
PEREIRA**

2017

**Planteamiento multiobjetivo para resolver el problema de ruteo de vehículos con
restricciones de capacidad**

Lilibeth Quiñones Saavedra

**Anteproyecto de Trabajo de Grado para optar el título de:
Ingeniero Industrial**

Directora

Eliana Mirledy Toro Ocampo, Ph.D

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Facultad de Ingeniería Industrial

Pereira

Diciembre, 2017

Nota de Aceptación:

PhD. Eliana Mirledy Toro O.
Directora

Pereira, Colombia. Diciembre de 2017

Agradecimientos

- Primeramente, a Dios, que gracias a él se hace posibles todos los triunfos de la vida.
- A mi directora de tesis la Doctora Eliana Mirledy Toro Ocampo, por ser una excelente instructora, por su tiempo de disposición, por sus atenciones a todas las dudas y hallazgos que se me presentaron durante la investigación, por su apoyo incondicional y finalmente por haberme brindado la idea, primeramente, material y suficientes herramientas para desarrollar la metodología.
- A mis padres, que son mi razón de ser, ya que me han apoyado en todo mi proceso educativo.

Glosario

AMPL

(A Modeling Language for Mathematical Programming)

Lenguaje de modelado para programación matemática

BB

(Branch and Bound)

Algoritmo de Ramificación y acotamiento

CVRP

(Capacitated Vehicle Routing Problem)

Problema de Ruteo de Vehículos Considerando Restricciones de Capacidad

DCVRP *(Capacitated vehicle routing problem with distance constraints)*

Problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad y distancia

MDVRP

(Multi-Depot Vehicle Routing Problem)

Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Depósitos

OVRP

(Open Vehicle Routing Problem)

Problema de Ruteo sin retorno al depósito

TSP

(Traveling Salesman Problem)

Problema del Agente Viajero

SDVRP

(Vehicle Routing Problem with Split Delivery)

Problema de ruteo de vehículo con entrega dividida

VRP

(Vehicle Routing Problem)

Problema de Ruteo de Vehículos

VRPB

(Vehicle Routing Problem with Backhauls)

Problema de ruteo de vehículos con restricción de entregar antes de recoger.

VRPPC

(Vehicle Routing Problem with Private Fleet And Common Carrier)

Problema de Ruteo de Vehículos Considerando Flota Propia y Subcontratada

VRPPD

(Vehicle Routing Problem Pickup and Delivery)

Problema de ruteo de vehículos con entregas y recogidas

VRPTW

(vehicle routing problem with time windows)

Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo

Índice de Contenido

Índice de Contenido	7
CAPITULO I	12
1. Introducción.....	12
1.1 Área de investigación.....	13
1.2 Materias de investigación	13
2. Definición del tema de investigación.....	15
2.1 Deficiencias en el conocimiento	15
2.2 Justificación y viabilidad.....	15
2.3 Origen.....	16
2.4 Fuentes generadoras	16
3. Problema de la investigación	17
3.1 Planteamiento del problema	17
3.2 Formulación del problema.....	17
3.3 Sistematización del problema.....	17
4. Objetivos	19
4.1 Objetivo general.....	19
4.2 Objetivos específicos.....	19
5. Justificación	20
6. Marco referencial.....	21
6.1 Marco teórico.....	21
6.1.1 Antecedentes.....	21
6.2 Marco conceptual	23
6.3 Marco espacial	24
6.4 Marco temporal	24
CAPITULO II	25
7. Formulación matemática multiobjetivo del CVRP	25
7.1 Definición de las variables	27
7.2 Topología del modelo matemático.....	28
8. Técnicas de solución para el CVRP.....	32
8.1 Técnicas exactas.....	33
8.2 Heurísticas.....	34
8.3 Metaheurísticas	35

8.4 Matheurísticas	37
9. Variaciones del CVRP	38
Capitulo III	42
10. Resultados.....	42
10.1 Problemas multiobjetivos	42
10.2 Análisis de resultados	43
10.3 Resultados individuales para cada instancia.....	45
10.4 Minimización del número emisiones	55
10.5 Metodología de Pareto	56
10.6 Graficas de frente de Pareto	58
11.Conclusiones	65
Capitulo IV	67
11. Bibliografías.....	67

Índice de figuras

figura 1. topología de árbol.....	28
figura 2. Arborescencia.....	29
figura 3- rutas cerradas al deposito	30
figura 4. Técnicas de solución	32
figura 5. Variaciones del CVRP.....	38

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. minimización de costos de operación	44
Tabla 2. CVRPPC_P_16_k8.....	45
Tabla 3. CVRPPC_P_19_k2.....	46
Tabla 4. CVRPPC_P_20_k2.....	46
Tabla 5.CVRPPC_P_21_k2.....	47
Tabla 6. CVRPPC_P_22_k2.....	47
Tabla 7. CVRPPC_P_22_k8.....	48
Tabla 8. CVRPPC_P_23_k8.....	49
Tabla 9. CVRPPC_A_32_k5	50
Tabla 10.CVRPPC_A_33_k5	51
Tabla 11. CVRPPC_A_39_k6.....	51
Tabla 12. CVRPPC_P_40_k5.....	52
Tabla 13. CVRPPC_P_45_k5.....	53
Tabla 14. CVRPPC_P_50_k7.....	54
Tabla 15. Minimización de emisiones ambientales	55
Tabla 16. Resultado de Frente de Pareto reduciendo costos y emisiones.....	56

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. frente de Pareto_P_16_k8	58
Gráfica 2. frente de Pareto_P_19_k2	58
Gráfica 3. frente de Pareto_P_20_k2	59
Gráfica 4. frente de Pareto_P_21_k2	59
Gráfica 5. frente de Pareto_P_22_k2	60
Gráfica 6. frente de Pareto_P_22_k8	60
Gráfica 7. frente de Pareto_P_23_k8	61
Gráfica 8. frente de Pareto_A_32_k5	61
Gráfica 9. frente de Pareto_A_33_k5	62
Gráfica 10.frente de Pareto_A_39_k6	62
Gráfica 11.frente de Pareto_P_40_k5	63
Gráfica 12.frente de Pareto_P_45_k5	63
Gráfica 13.frente de Pareto_P_50_k7	64

CAPITULO I

1. Introducción

Desde los inicios de la conformación de países y ciudades, el mundo exige de diferentes rutas para la movilización de las personas, ya que esto hace parte de la vida cotidiana. Pero, a medida en que evoluciona la sociedad, la forma de movilización es cada vez más difícil, especialmente cuando se trata de llegar a un lugar en el menor tiempo posible o a un menor costo.

Sin embargo, las personas en la mayoría de los casos construyen rutas para desplazarse de manera intuitiva. A pesar de esto, se siguen presentando inconvenientes, ya que de esta manera no se logran resultados efectivos.

Ahora bien, las diferentes empresas reflejan una necesidad de conocer la manera de resolver problemas relacionados con el transporte, es por ello que el presente proyecto radica en la documentación de planteamientos multiobjetivos para solución del problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad.

1.1 Área de investigación

EL área de investigación posibilita la aplicación de diferentes teorías, como las de investigación de operaciones y logística, como áreas principales para ver reflejado el problema de enrutamiento o ruteo de vehículos (VRP), considerando restricciones de capacidad (CVRP).

Por otra parte, también se posibilita la interacción con la informática, ya que la solución de estos problemas mencionado anteriormente, también se hace por medio de programas o software especiales para cada caso.

1.2 Materias de investigación

Las materias que se van a emplear para la realización de la investigación son las siguientes:

- **Investigación de operaciones I**
- **Investigación de operaciones II**
- **Informática**
- **Logística**

2. Definición del tema de investigación

2.1 Deficiencias en el conocimiento

La sociedad, desde años remotos, ha sufrido un déficit en cuanto al transporte y las rutas, ya que estos se encuentran involucrado directamente con el desarrollo y crecimiento de las poblaciones, sin embargo, cada vez se hace más complejo el control de esta problemática, pues el número de vehículos crece proporcionalmente a número de individuos y esto arroja una serie de caos, tanto a nivel empresarial, como a nivel social. (González and González 2007)

2.2 Justificación y viabilidad

Partiendo de la identificación del problema, acerca del ruteo de vehículos con restricciones de capacidad, la complejidad para identificar los métodos de solución adecuados y pertinentes, se requiere documentar los planteamientos multiobjetivos para la solución del CVRP.

2.3 Origen

El origen y estudio se fundamenta y define ante la necesidad de reconocer las actuales y vigentes formas de solucionar el problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad, a través de planteamientos multiobjetivos, como también documentar todas las posibles metodologías para resolver el mismo.

2.4 Fuentes generadoras

La idea del proyecto surge ante la necesidad de profundizar en el tema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad, considerando los planteamientos multiobjetivos, para resolver situaciones donde se presente dicho dilema. Posibilitando un método de solución pertinente según el caso que se presente.

3. Problema de la investigación

3.1 Planteamiento del problema

Actualmente el mundo requiere contar con eficiencias en cuanto al ruteo de vehículos, ya que se exige en el día a día la utilización óptima de los recursos y la minimización de gastos, lo cual involucra implementar sistemas que permitan establecer las rutas más cortas para llegar a un determinado punto y esta ruta, debe considerar los menores costos posibles.

Como es de reconocer, el CVRP es un problema de enrutamiento de vehículos en el cual se considera la restricción de capacidad, para definir con la limitante rutas óptimas que logren reducir los costos de las operaciones.(Correa Espinal, Cogollo Flórez, and Salazar López 2011)

3.2 Formulación del problema

¿Cuáles son los planteamientos multiobjetivos para resolver el problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad?

3.3 Sistematización del problema

¿Qué métodos de solución existen en la actualidad para solucionar el problema CVRP?

¿En qué casos se debe utilizar cada método de solución para el problema CVRP?

¿Cómo se aplica cada método de solución para el problema CVRP?

¿Cómo se formulan las diferentes funciones objetivo?

4. Objetivos

4.1 Objetivo general

Identificar los planteamientos multiobjetivos para resolver el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad.

4.2 Objetivos específicos

- Revisar antecedentes sobre el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad y único depósito.
- Conocer los métodos de solución para el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad.
- Describir los diferentes métodos de solución para el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad.
- Examinar modelos matemáticos asociados al problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad.
- Identificar las diferentes funciones objetivo a optimizar, asociadas al CVRP.

5. Justificación

La importancia de presente trabajo, radica en dar conocer que el problema de transporte de vehículos es de vital importancia para el desarrollo de una sociedad, y está involucrado en la vida cotidiana de los seres humanos, como seres sociables que hacen parte de una sociedad.

Es de reconocer, que a medida en que el mundo crece, y las poblaciones aumentan, los problemas de transporte son cada vez más complejos, pues la exigencia de la sociedad es contar con sistemas y rutas que permitan el desplazamiento hacia diferentes lugares, ahorrando costos y disminuyendo distancia.

El problema del ruteo de vehículos, hace un acercamiento a lo que hoy se conoce como caos en las diferentes rutas, pues las empresa actualmente requieren de programas o software que permitan diseñar una red, para el correcto funcionamiento de sus actividades, tanto en el área de producción, como en el área de mercadeo y logística es necesario tener un conocimiento acerca de cómo reducir costos, marcando rutas específicas o ubicaciones estratégicas que permitan a la organización obtener mejores resultados.(Herazo 2012)

6. Marco referencial

6.1 Marco teórico

6.1.1 Antecedentes.

El problema de enrutamiento o ruteo de vehículos (*VRP, vehicle routing problem*) nace en 1959 con la intervención de Dantzing y Ramser, los cuales describieron una aplicación para la distribución de gasolina a diferentes estaciones de servicios, que les permitiera optimizar dicho proceso, para lo cual plantearon un modelo matemático.(Cardozo 2013)

Después de esto, Clarke y Wright, en el año 1964, diseñaron el primer algoritmo que resultó efectivo para resolver el problema, y, es así como se dio apertura a grandes investigaciones y trabajos en el área de ruteo de vehículos, que en la medida en que se van acercando a la realidad, requieren de más variables, involucrando distintas situaciones de la vida real.(Castro 2014)

Ahora bien, el problema de enrutamiento de vehículos con restricción de capacidad (*CVRP, capacitated vehicle routing problem*), es una variante del problema de enrutamiento de vehículos (*VRP, vehicle routing problem*) que se origina del problema del agente viajero (*TSP, traveling salesman problem*) el cual es la semilla, ya que permite resolver las diferentes variaciones del problema de ruteo.(Daza, Montoya, and Narducci 2009)

El problema de enrutamiento de vehículos con restricción de capacidad (*CVRP*) es un problema de optimización que está dentro de la clase NP-completos, para los que no existe un

algoritmo de tiempo polinomial que pueda resolver a optimalidad, es decir, que cada vez que se incorpore un nuevo cliente a la ruta, aumenta exponencialmente la resolución del problema.

En el CVRP, todos los clientes se corresponden con las entregas y las demandas son deterministas, y no se puede dividir. Los vehículos son idénticos y se basan en un único almacén central, y sólo las restricciones a la capacidad de los vehículos son impuestas. El objetivo es minimizar el coste total (es decir, una función ponderada del número de rutas y su duración o tiempo de viaje) para servir a todos los clientes.(Toro-Ocampo 2016)

6.2 Marco conceptual

TSP

En el Problema del Agente Viajero (o TSP por *Travelling Salesman Problem*) se dispone de un solo vehículo que debe visitar a todos los clientes en una sola ruta y a costo mínimo. No suele haber un depósito (y si lo hubiera no se distingue de los clientes), no hay demanda asociada a los clientes y tampoco hay restricciones temporales.(Olivera 2004)

VRP

El VRP es una extensión del *m-TSP* en la cual se tienen clientes, vehículos y demandas ilimitadas, para crear rutas eficientes a partir de un depósito.(Access 2005)

CVRP

El CVRP es el problema más generalizado del VRP, en el cual se tienen clientes con demandas asociadas a ellos y cada vehículo tiene una restricción de capacidad.(Garc, n.d.)

6.3 Marco espacial

El proyecto se va a ejecutar en Colombia, en el departamento de Risaralda, en la ciudad de Pereira, en la UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.

6.4 Marco temporal

El estudio se comenzó a realizar en el primer semestre del 2017 y culminará en el segundo semestre del 2017.

CAPITULO II

7. Formulación matemática multiobjetivo del CVRP

El modelo matemático que se va utilizar en este proyecto es planteado entre las ecuaciones (1.1) - (1.9) y es descrito a continuación. Se tiene un conjunto de J clientes que deben ser atendidos por kl vehículos homogéneos como máximo, partiendo de un depósito único indexado con 0. Así el conjunto de todos los vértices es $V = \{0\} \cup J$. Para efectos de validar la no violación de la capacidad Q del vehículo, se define una variable t_{ij} con $i, j \in V$ encargada de contabilizar la cantidad de producto circulando entre los nodos i y j , además se define un conjunto de distancias c_{ij} con $i, j \in V$ y demandas D_j con $j \in V$.

Las variables del modelo se definen como: x_{ij} las cuales identifican los arcos activos; f_{ij} Variable binaria que define si el consumidor ubicado en el nodo $j \in J$ es atendido por una ruta que inicia en el centro de distribución $i \in I$. a_{ij} corresponde al arco de retorno al depósito por cada ruta generada.

La función objetivo (1.1) expresa la minimización del costo de las rutas. Un nodo de demanda j debe tener un arco de llegada que lo conecta a la ruta, esto se garantiza mediante (1.2). La expresión (1.3) garantiza que todos los nodos sean de grado 2, es decir que se ingrese y se salga del nodo una única vez. La ecuación (1.4) corresponde al grado del depósito, a través de ella se identifica que el número de rutas que salen e ingresan al depósito sea igual. La ecuación (1.5) corresponde a una restricción asociada a la capacidad de depósito. Con la ecuación (1.6) se garantiza que se elija un arco en una sola dirección, es decir, que si se va de i a j , no se puede ir de j a i . con la ecuación (1.7) se respeta el balance

de flujo a través de la ruta, es decir, que se lleva control de la cantidad de producto que queda dentro del vehículo a medida en que se visitan los clientes. La (1.8) corresponde a un límite inferior por radialidad. La ecuación (1.9) evita que se exceda la capacidad del vehículo.(Toro-ocampo 2016)

$$\min z = \sum_{\substack{i \in V \\ j \in J}} x_{ij} \cdot c_{ij} \sum_{i \in J} c_{i0} \cdot a_{ij} \quad (1.1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in J \quad (1.2)$$

$$\sum_{k \in J} x_{ik} + \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in V} x_{ij} \quad \forall j \in J \quad (1.3)$$

$$\sum_{j \in J} x_{0j} = \sum_{j \in J} a_{ij} \quad \forall i \in I \quad (1.4)$$

$$\sum_{j \in J} t_{0j} = \sum_{i \in V} D_j \quad (1.5)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall i, j \in V \quad (1.6)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} t_{ij} = \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq j}} t_{jk} + D_j \quad \forall j \in J \quad (1.7)$$

$$\sum_{ij \in V} x_{ij} = |J| \quad (1.8)$$

$$t_{ij} \leq Q x_{ij} \quad \forall i, j \in V \quad (1.9)$$

7.1 Definición de las variables

I : conjunto de depósitos

J : conjunto de cliente

$V: I \cup J$

Q : cantidad máxima de la carga

D_j : demanda de cada cliente j

c_{ij} : costo de ir de i a j

f_{ij} : Binaria, toma el valor de 1 si el cliente ubicado en j es atendido desde el nodo i . Toma el valor de 0 en caso contrario

z_j : Ultimo cliente en ser atendido

a_{ij} : Nodo para retornar al deposito

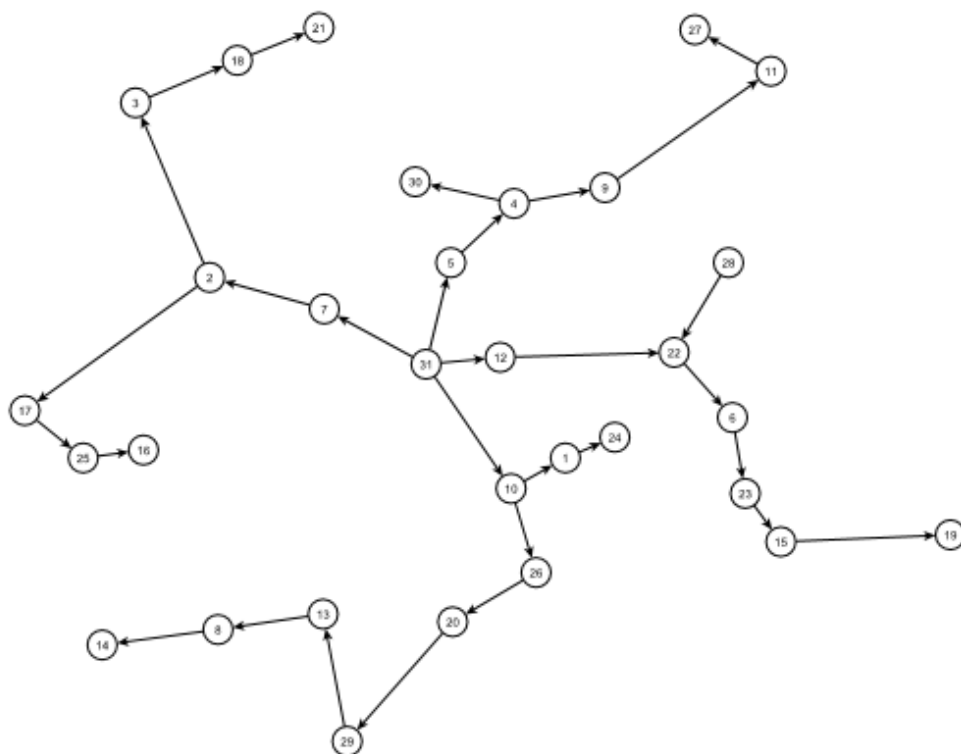
t_{ij} : Cantidad de producto para cada flujo

x_{ij} : Indica cuando un arco se activa

7.2 Topología del modelo matemático

A continuación, se presentará la topología generada, a partir del modelo matemático expuesto anteriormente, la cual involucra tres pasos importantes:

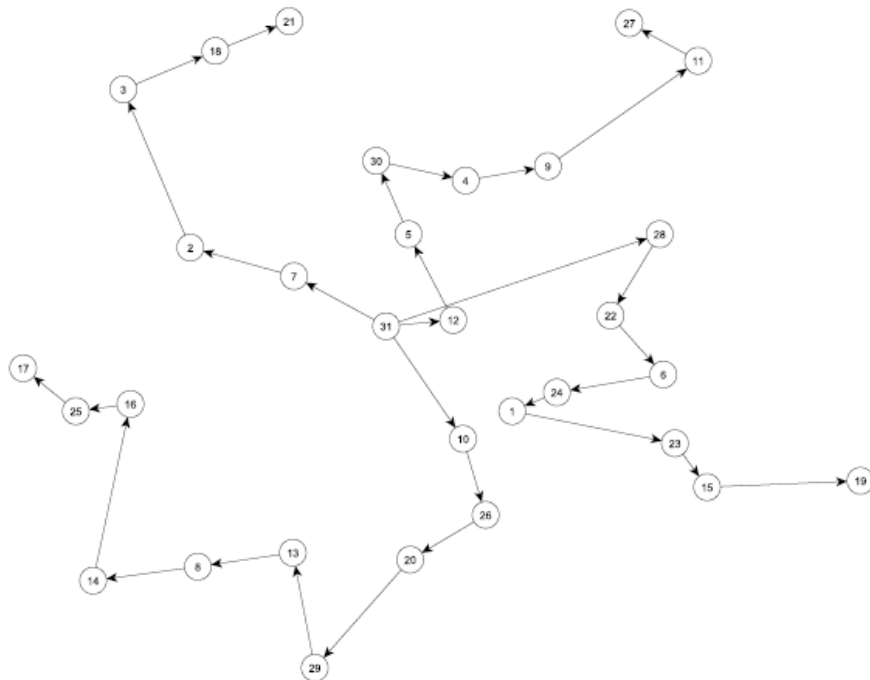
figura 1. topología de árbol



- **Paso 1**

Cuando el modelo considera las restricciones (1.2), (1.5) - (1.9), se genera un árbol como el que se observa anteriormente en la figura 1. En este, el depósito se identifica con el número 31, el cual es conectado a través de cuatro arcos. En este grafo, los nodos 2,4,22,10 y 13 son conectados a través de 3 arcos, los demás nodos presentan 2 o menos conexiones. Un gráfico con estas características, donde más de 2 nodos presentan más de 2 conexiones, son denominados tipo árbol.

figura 2. Arborescencia

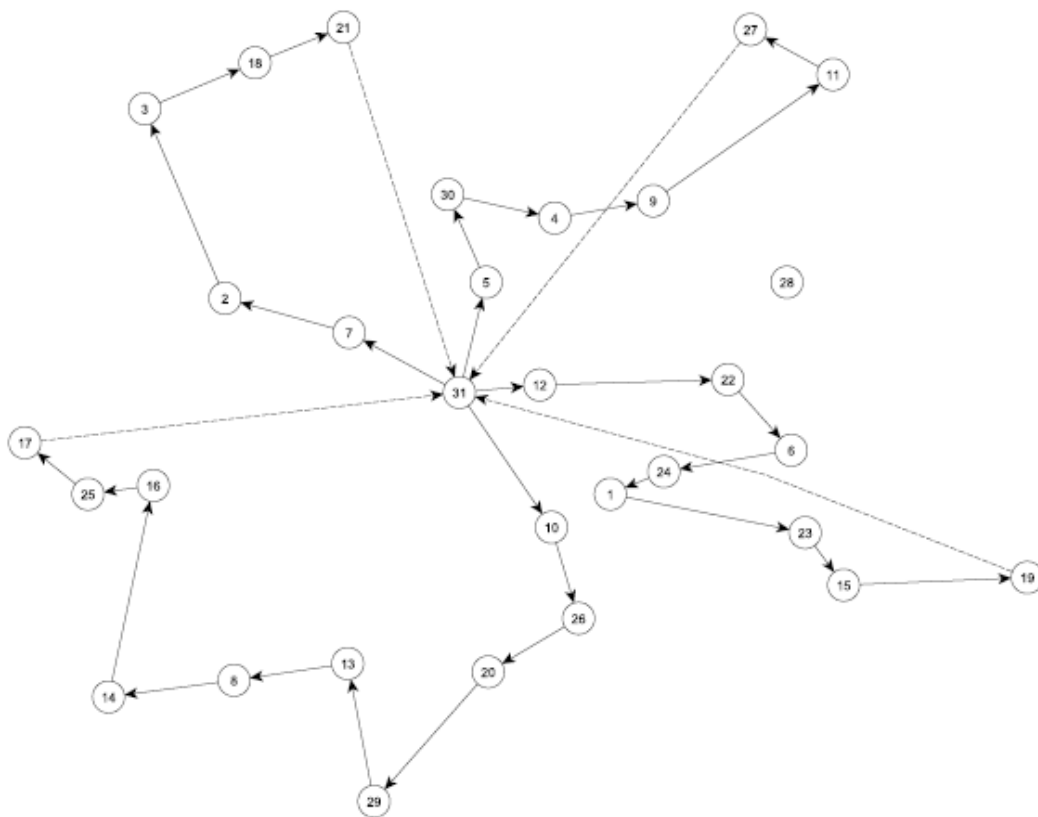


- **Paso 2**

En este paso, se agrega al modelo, las restricciones (1.3) y (1.4), con la variable $a_{ij} = 0$, generando una configuración tipo arborescencia, como se refleja en la figura 2.

En la red, se puede notar que todos los nodos, excepto el 31 (deposito), están conectados por 1 o 2 elementos. A este tipo de configuración se le denomina arborescencia, ya que las rutas parten del depósito y terminan en un nodo al cual se le llama terminal, constituyéndose en rutas con un solo nodo terminal.

figura 3- rutas cerradas al deposito



- **Paso 3**

En este último paso, se obtienen las rutas cerradas, al hacer la variable $a_{ij} = 1$, así como se muestra en la figura 3, donde los arcos 17-31, 19-31, 27-31, 21-31 representan el enlace que conecta al cliente final con el depósito del cual parte la ruta.

De la misma manera, en esta configuración se observa que las rutas parten y retornan al mismo depósito. Exceptuando el nodo 31 (depósito), todos los nodos son de grado 2, es decir, que solo se entra y se sale de ellos una vez.

El modelo planteado anteriormente, puede ser utilizado para diferentes variaciones de problemas de ruteo de vehículos con o sin retorno al depósito, considerando diferentes restricciones para cada caso y haciendo las respectivas adaptaciones al mismo, de manera que responda a los objetivos de cada caso.

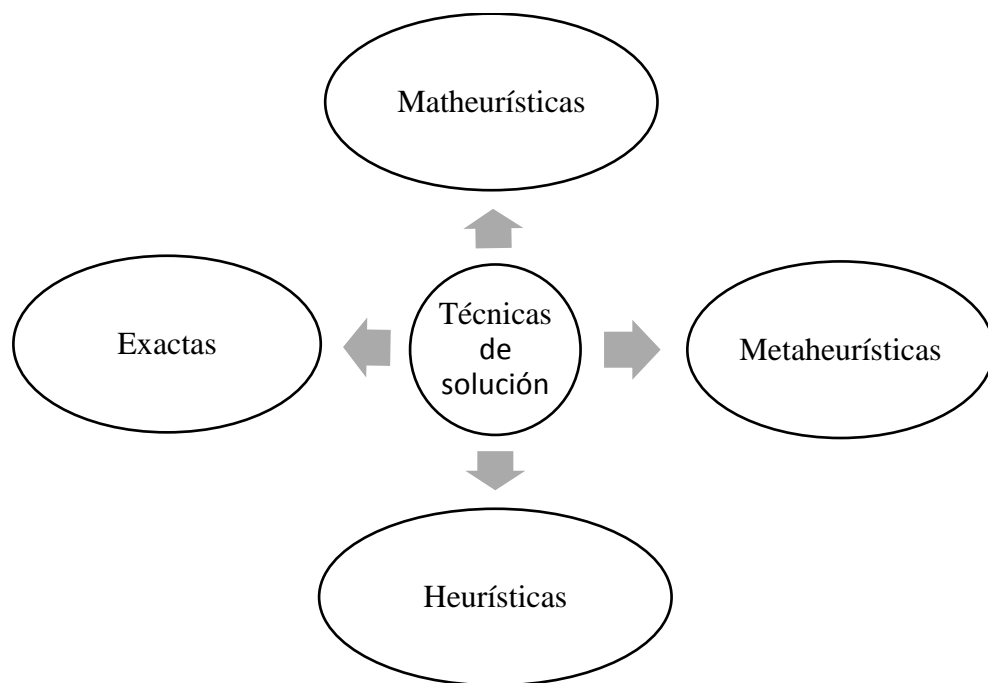
En los primeros, la ruta inicia en el depósito y termina en un nodo que corresponde al último cliente visitado, es decir que se hacen versiones abiertas. En los segundos, la ruta comienza en el depósito y una vez se han visitado todos los clientes, se retorna al depósito. Finalmente, en los terceros se hace una forma híbrida de los dos anteriores, donde se consideran ruteos con y sin retorno al depósito, además se hace uso de los vehículos combinados de flota propia y subcontratada.

Adicionalmente, el planteamiento del modelo permite abordar problemas mono y multiobjetivos, como también hacer consideraciones de diversos depósitos. (Jameson., 1976)

8. Técnicas de solución para el CVRP

Para la solución de problemas CVRP, el cual representa la variación más generalizada del VRP existen cuatro técnicas principales: matheurísticas, metaheurísticas, heurísticas y exactas.

figura 4. Técnicas de solución



8.1 Técnicas exactas

Las técnicas de soluciones exactas para el problema de ruteo de vehículos, permite obtener soluciones optimas, pero en ocasiones no son de muy buena calidad, pues esta técnica, a pesar de obtener respuestas al problema, solo es útil en problemas reducidos, es decir, donde no se involucren demasiadas variables.

Las técnicas exactas, son útiles para el caso de problemas de pequeñas magnitudes, como es el caso de la académica. Existen algunos programas que permiten resolver problemas a través de estas técnicas, pero, en la mayoría de los casos solo tienen alcance para un número reducido y específico de variables, el cual al excederse puede presentar alteraciones.

Algunas de las técnicas exactas más utilizadas son:

- Ramificación y acotamiento (branch and bound (Christofides, Mingozi, y Toth, 1981))
- Ramificación y corte (branch and cut (Augerat, Belenguer, Coberan, Naddef, y Rinaldi, 1995))
- Programación dinámica y programación lineal entera (Balinski y Quandt, 1964)

Para el caso del CVRP, estas técnicas fallan en ocasiones, debido a la complejidad de algunas restricciones para los algoritmos usados, sin embargo, para problemas de este tipo la técnica exacta más utilizada es el Branch and cut (Naddef y Rinaldi, 2001; Ralphs et al., 2003)

8.2 Heurísticas

Estas técnicas heurísticas permiten respuestas a los problemas de ruteo de vehículo, obteniendo soluciones de buena calidad, sin embargo, no garantizan que sea la solución más óptima.

Las heurísticas son utilizadas, para obtener resultados en menores tiempos, pero por su misma rapidez no necesariamente se llega al punto de optimalidad para un problema.

Las heurísticas, para la solución de problemas de ruteo de vehículos se clasifican en:

- **Constructivas**

No parten de una solución factible, sino que la van elaborando a medida que progresan. Una de las más conocidas es la heurística de ahorros donde se crean n rutas factibles, y se va probando a unir una ruta que termina en i con otra que comienza en j , agregando el arco $[i, j]$, calculando el ahorro de cada posible movimiento. Otro ejemplo típico son las heurísticas angulares o de pétalo, donde las soluciones se van agregando en el orden angular que presentan respecto al centro de distribución, respetando las restricciones de capacidad, o de distancia máxima de viaje, según sea el caso.

- **De mejora**

Trabajan sobre una solución factible. Existen del tipo intra-ruta, que mueven arcos dentro de una misma ruta, entre los que se encuentran las heurísticas 2-opt, 3-opt y más generalmente la

heurística de Lin-Kernighan, y extra-ruta que los intercambian entre dos o más rutas distintas, como la heurística 2-swap.

- **Técnicas de relajación**

son métodos asociados a la programación lineal entera. La más conocida es la llamada Relajación Lagrangeana, que consisten en descomponer un modelo lineal entero en un conjunto de restricciones difíciles y otras más fáciles, relajando las primeras, al pasarlas a la función objetivo multiplicándolas por una penalidad, en forma análoga al método de multiplicadores de Lagrange. Esto sirve para obtener cotas al problema original, acelerando el proceso de resolución.

8.3 Metaheurísticas

Una metaheurística es una estrategia (heurística) general para la resolución de una gran variedad de problemas para los que no existe un algoritmo confiable de resolución, ya sea por la complejidad del problema, o por falta de estudios en la resolución de éste.

Tienen un rol fundamental en la Investigación de Operaciones, pues pueden ser aplicadas a problemas de Optimización Combinatorial, con resultados muy cercanos al óptimo. Se basan en la observación de la naturaleza, la evolución biológica, procesos físicos asociados a la manufactura, etc.

Dentro de las características deseables de una metaheurística, están:

- Ser algoritmos de optimización global. Esto implica la existencia de mecanismos que le permitan escapar de óptimos locales, ya sea perturbando la solución actual, generándola basada en otras anteriores, aceptando con una cierta probabilidad alguna que no mejora la evaluación de la función objetivo, etc.
- Brindar suficiente libertad a quien la implemente, mediante la posibilidad de trabajar con distintos parámetros, estrategias de paralelización, adición de heurísticas complementarias, etc.
- Lograr un rendimiento consistente y estable en los problemas de la clase que resuelven. (Lüer et al. 2009)

Algunas de las metaheurísticas más comúnmente utilizadas en problemas de optimización Combinatorial, se encuentran:

- Algoritmos genéticos
- Búsqueda en vecindarios variables
- Recocido simulado
- Búsqueda tabú
- Colonias de hormigas

8.4 Matheurísticas

Esta técnica es una combinación de técnicas exactas con técnicas aproximadas, las cuales brindan respuestas de muy buena calidad.

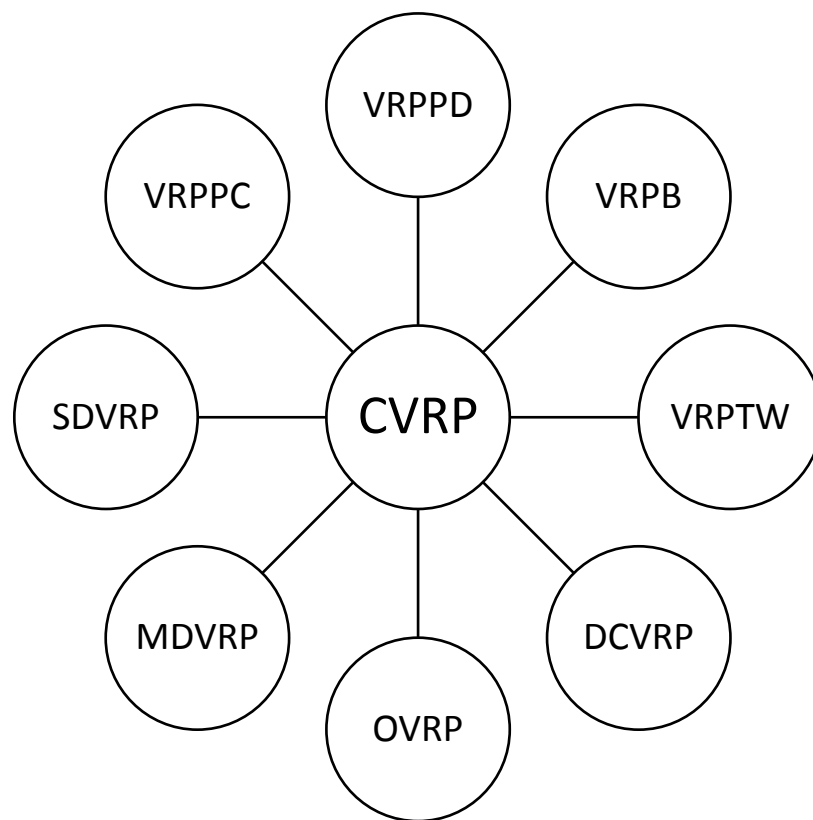
Existe una matheurística de dos fases que combina Relajación Lagrangena, Lagrangian Relaxation (LR) y Búsqueda Tabú Granular, Granular Tabu Search (GTS). El algoritmo consta de un proceso de Inicialización a través de una Heurística golosa, desarrollada en dos etapas.

También, la literatura propone una heurística secuencial rutear primero-asignar después. Usan 4 tipos de clusterización, seis medidas de proximidad entre clientes, las que son descritas en detalle por Barreto et al. [2007]. Las rutas se encuentran a través de un modelo de dos índices usando un software comercial si el clúster es de menos de 40 clientes. De otra manera se calcula el tour por medio de heurísticas de inserción que determinan el próximo cliente usando criterios del algoritmo del ahorro y del vecino más lejano. El tour es mejorado usando 3-opt. Para la fase de localización se resuelve el problema de localización-asignación usando.

9. Variaciones del CVRP

El problema de ruteo de vehículos con restricción de capacidad (CVRP), al ser la forma más generalizada del problema de ruteo de vehículos ilimitado, presenta algunas variaciones, las cuales consideran diferentes restricciones.

figura 5. Variaciones del CVRP



VRPPD (*Mixed service*)

Es el modelo que involucra recogida y entrega. En esta extensión los vehículos tienen dos tareas, una es entregar los productos al cliente y la otra es recoger otros bienes en las instalaciones del cliente.

En el VRPPD una flota heterogénea de vehículos debe satisfacer un conjunto de requerimientos; cada requerimiento está definido por el punto de recogida, el punto de entrega correspondiente y una cantidad demandada a transportar entre estos lugares.

El VRPPD se puede formular como un modelo de programación lineal entera mixta como lo proponen Hoff, Gribkovskaia, Laporte, y Løkketangen (2007).

VRPB (*Backhauling*)

En este se tienen en cuenta las devoluciones. Es una variación del CVRP de la cual salen dos subdivisiones: la ruta de recorrido y la ruta de regreso. En la ruta de recorrido cada cliente tiene una demanda específica, la cual se debe satisfacer en la ruta asignada para dicho cliente, y en la línea de regreso, se tiene una cantidad determinada que entrega cada cliente para ser enviada al depósito, esto depende de los requerimientos del cliente, es decir, si el cliente si necesita hacer una devolución.

Este problema, al considerar una distribución mixta, genera un ahorro significativo en costo de transporte, ya que se satisfacen dos servicios en un mismo vehículo, sin generar dobles recorridos al mismo lugar.

También, se debe tener en cuenta que, a cliente visitado, primero se le efectúa la entrega y luego se recibe la devolución.

VRPTW (*time Windows*)

En este modelo se considera el tiempo. Es una extensión de CVRP donde el servicio a cada cliente debe comenzar con un tiempo específico y el vehículo debe permanecer en el local del cliente durante el servicio. El modelo de Toth y Vigo (2002) de VRPTW ilustra muy bien dicha variación.

DCVRP (*Route lenght*)

Es un problema VRP en el cual se considera distancia y capacidad. En este problema existe una capacidad limitada para cada vehículo según su referencia o tipo y una distancia máxima permitida, las cuales son restricciones de estricto cumplimiento.

En este tipo de problemas para cada recorrido existe una distancia la cual no se puede exceder.

Por otra parte, el modelo simétrico DCVRP de Laporte, Nobert y Desrochers (1985) representa uno de los mayores aportes al VRP.

OVRP (*Open Vehicle Routing Problem*)

Es la extensión abierta del CVRP. En este tipo de problema, los vehículos no tienen la obligación de regresar al depósito, por lo tanto, se adapta a las diversas empresas donde utilizan vehículos de terceros para las distribuciones de la mercancía.

Los vehículos al ser tercerizados no deben regresar al punto de donde fueron despachados.

Para la solución óptima de este tipo de modelos opta en su mayoría, por la reducción en el contrato de vehículos subcontratados, para disminuir los costos de los viajes.

El OVRP recibió muy poca atención en la década de los ochenta; en cambio, a partir del año 2000 se han llevado a cabo varias investigaciones exitosas, como la realizada por Repoussis, Tarantilis, y Ioannou (2007), utilizando la búsqueda Tabú y el algoritmo recocido determinístico.(Brajat 2009)

MDVRP (*Multi-Depot*)

Se le conoce también como VRP con múltiples depósitos. En este caso se tienen diferentes depósitos, donde cada uno tiene asignadas rutas de vehículos independientes, las cuales visitan a los clientes estipulados. (Renaud, J. et al. (1996))(Wu, T-H. et al. (2002)) (Crevier, B. et al. (2007)) (Ho, W. et al. (2008)).

SDVRP (*Split Delivery*)

Es el VRP de entrega dividida. Esta variante, permite que un cliente pueda llegar a ser visitado por diferentes vehículos, si se presenta el caso que el vehículo lleve a su límite de capacidad, además teniendo en cuenta, que dicha situación disminuya los costos. (Belenguer, J. et al. (2000)) (Hertz, A. et al. (2006)) (Chen, S. et al. (2007)) (Jin, M. et al. (2007)).

VRPPC (*Split Delivery*)

Esta variante del VRP, considerada flota propia y subcontratada. En este tipo de problemas, se cuenta con un número de vehículos que son propios de la empresa, sin embargo, para suplir con la demanda en su totalidad se requiere de utilizar vehículos tercerizados, que permitan distribuir a todos los clientes la demanda estipulada.

Capítulo III

10. Resultados

10.1 Problemas multiobjetivos

Muchos problemas reales, deben satisfacer diferentes objetivos conjuntamente, sin embargo, estos objetivos pueden presentar controversias entre sí. Para el caso de problemas de ruteo de vehículos, se quiere la reducción de costos, pero también la reducción de emisiones ambientales, teniendo en cuenta también la minimización de tiempos y la rapidez para atender a todos los clientes.

Ahora bien, para resolver este tipo de problemas se opta por formular el modelo de tal manera que se plantee uno de los requerimientos como función objetivo y los demás, se plantean como restricciones. También se opta por transformar las distintas funciones objetivo en una sola que satisfaga todas las necesidades en lo posible, haciendo una suma ponderada de todos los factores para tener en cuenta.

Entonces, los problemas multi-objetivo, son aquellos que involucran diferentes factores en una misma función objetivo y se requiere la obtención de un punto óptimo que atienda a todas las necesidades.

Estas funciones objetivo deben proporcionar resultados óptimos que permitan atender todos requerimientos simultáneamente, y para esto se hace uso del Epsilon- Constrain, el cual permite que esos problemas multiobjetivos, se aborden seleccionando una parte de la función objetivo, que tenga en cuenta un solo factor y las demás instancias a tener en cuenta, se

convierten en restricciones. Esto facilita el abordaje de los problemas, ya que facilita la obtención de resultados óptimos y de buena calidad.

Para la solución de problemas multiobjetivo, se hace uso del óptimo de Edgeworth- Pareto, el cual fue propuesto por Edgeworth en 1881 y generalizado por Pareto en 1896.

El óptimo de Pareto permite reconocer que al beneficiar un factor, se involucran otros factores, los cuales se deben de considerar para obtener óptimos globales de mejor calidad, sin dejar perjuicios para ninguna de las partes.

10.2 Análisis de resultados

Para realizar las pruebas de diferentes instancias de problemas de ruteo de vehiculos con restricción de capacidad, se hizo previamente una pruebas con diferentes modelos, los cuales no arrojaban frente de pareto en sus resultados, por ende, se acudio a utilizar modelos que involucraran, tanto flotas propias, como subcontractadas, onteniendo mejores resultados.

Las pruebas realizadas con la metodología propuesta, y teniendo como base los casos estrcturados en el articulo **“modelo matemático para resolver el problema de localización y ruteo con restricciones de capacidad considerando flota propia y subcontractda”**, arrojaron respuestas que se adpataban a los requerimientos del proyecto.

Cabe aclarar, que para las corridas de los modelos, no se consideraron costos en los depositos y tampoco costos de apertura de las rutas, ya que estos no eran objeto de estudio para esta metodología.

Tabla 1. minimización de costos de operación

Caso	k	Q	W	Rutas		costos rutas		FO	Tiem po (s)	GAP
				Propia s	Subcont ratadas	Propias	Subcont ratadas			
CVRPPC_P_1 6_k8	6	35	2460	4	4	258	192	450	6	0,37%
CVRPPC_P_1 9_k2	1	160	3100	1	2	115	140	255	127	0,77%
CVRPPC_P_2 0_k2	1	160	3100	1	1	128	138	266	172	0,98%
CVRPPC_P_2 1_k2	1	160	2980	1	1	117	150	267	327	0,68%
CVRPPC_P_2 2_k2	1	160	3080	1	1	139	132	271	760	0,82%
CVRPPC_P_2 2_k8	5	300 0	2250 0	5	2	337	288	625	42	0,77%
CVRPPC_P_2 3_k8	5	40	3130	5	4	357	180	537	100	4,96%
CVRPPC_A_3 2_k5	3	100	4100	3	2	668	276	944	100	20,56%
CVRPPC_A_3 3_k5	3	100	4460	3	3	483	240	723	100	14,08%
CVRPPC_A_3 9_k6	4	100	5260	4	2	749	120	869	100	11,66%
CVRPPC_P_4 0_k5	4	140	6180	4	3	432	120	552	100	19,59%
CVRPPC_P_4 5_k5	4	150	6920	4	1	611	236	847	101	42,11%
CVRPPC_P_5 0_k7	5	150	9510	5	9	438	546	984	100	46,42%

En la tabla 1. se muestran las funciones objetivos arrojadas por el programa AMPL para los casos estudiados de las instancias de Augerat 1995, teniendo en cuenta que solo se consideraron los costos de operación como función objetivo.

10.3 Resultados individuales para cada instancia

FO: 450

Tabla 2. CVRPPC_P_16_k8

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontractadas
CVRPPC_P_16_k8	4	Ruta 1 1-4 4-2 2-1	Ruta 5 1-3
		Ruta 2 1-5 5-12 12-1	Ruta 6 3-6 6-15
		Ruta 3 1-8 8-10 10-14 14-1	Ruta 7 15-7
		Ruta 4 1-16 16-13 13-11 11-1	Ruta 8 7-9

Modelo teniendo en cuenta 16 clientes y 8 vehiculos, de los cuales se asigno una restricción para limitar los vehiculos pproprios con un valor maximó de 6 rutas propias y se dejó abierto para las rutas subcontractadas.

FO: 255

Tabla 3. CVRPPC_P_19_k2

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_19_k2	1	Ruta 1 1-5 5-12 12-15 15-13 13-4 4-18 18-17 17-9 9-11 11-2 2-1	Ruta 2 1-7 7-3 3-8
			Ruta 3 8-19 19-6 6-14 14-16 16-10

Modelo teniendo en cuenta 19 clientes y 2 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 1 ruta propia y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:266

Tabla 4. CVRPPC_P_20_k2

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_20_k2	1	Ruta 1 1-5 5-12 12-16 16-13 13-4 4-19 19-18 18-9 9-14 14-11 11-2 2-1	Ruta 2 1-7 7-20 20-6 6-15 15-17 17-10 10-8 8-3

Modelo teniendo en cuenta 20 clientes y 2 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 1 ruta propia y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:267

Tabla 5.CVRPPC_P_21_k2

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_21_k2	1	Ruta 1 1-17 17-2 2-11 11-9 9-19 19-20 20-4 4-13 13-16 16-12 12-5 5-1	Ruta 2 1-7 7-21 21-6 6-8 8-3 3-14 14-10 10-18 18-15

Modelo teniendo en cuenta 21 clientes y 2 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 1 ruta propia y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:271

Tabla 6. CVRPPC_P_22_k2

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_22_k2	1	Ruta 1 1-2 2-11 11-5 5-12 12-16 16-13 13-4 4-20 20-19 19-9 9-14 14-10 10-1	Ruta 2 1-17 17-7 7-21 21-6 6-15 15-18 18-22 22-8 8-3

Modelo teniendo en cuenta 22 clientes y 2 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 1 ruta propia y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:625

Tabla 7. CVRPPC_P_22_k8

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_22_k8	5	Ruta 1 1-9 9-7 7-4 4-5 5-1	Ruta 6 1-8 8-6
		Ruta 2 1-12 12-14 14-1	Ruta 7 6-11 11-10 10-3 3-2
		Ruta 3 1-15 15-19 19-21 21-1	
		Ruta 4 1-16 16-13 13-1	
		Ruta 5 1-18 18-22 22-1	

Modelo teniendo en cuenta 22 clientes y 8 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 5 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

Tabla 8. CVRPPC_P_23_k8

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_23_k8	5	Ruta 1 1-2 2-5 5-1	Ruta 6 1-3
		Ruta 2 1-4 4-20 20-19 19-1	Ruta 7 3-17 17-9
		Ruta 3 1-6 6-15 15-23 23-1	Ruta 8 9-21 21-8
		Ruta 4 1-12 12-16 16-13 13-11 11-1	Ruta 9 8-22 22-7
		Ruta 5 1-18 18-10 10-14 14-1	

Modelo teniendo en cuenta 23 clientes y 8 vehiculos, de los cuales se asigno una restricción para limitar los vehiculos pppropios con un valor maximó de 5 rutas propias y se dejó abierto para las rutas subcontratadas.

Tabla 9. CVRPPC_A_32_k5

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_A_32_k5	3	Ruta 1 1-21 21-6 6-26 26-11 11-16 16-23 23-10 10-30 30-15 15-1	Ruta 4 1-13 13-17 17-2
		Ruta 2 1-27 27-8 8-14 14-18 18-3 3-4 4-24 24-7 7-1	Ruta 5 2-31 31-20 20-32 32-22
		Ruta 3 1-28 28-19 19-29 29-5 5-12 12-9 9-25 25-1	

Modelo teniendo en cuenta 32 clientes y 5 vehiculos, de los cuales se asigno una restricción para limitar los vehiculos pproprios con un valor maximó de 3 rutas propias y se dejó abierto para las rutas subcontratadas.

FO:723

Tabla 10.CVRPPC_A_33_k5

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_A_33_k5	3	Ruta 1 1-16 16-18 18-10 10-4 4-17 17-30 30-1	Ruta 4 1-3
		Ruta 2 1-21 21-33 33-14 14-9 9-8 8-27 27-6 6-5 5-1	Ruta 5 3-13 13-31 31-26 26-28 28-11
		Ruta 3 1-25 25-7 7-20 20-15 15-22 22-2 2-32 32-12 12-1	Ruta 6 11-23 23-24 24-29 29-19

Modelo teniendo en cuenta 33 clientes y 5 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 3 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:869

Tabla 11. CVRPPC_A_39_k6

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_A_39_k6	4	Ruta 1 1-6 6-30 30-29 29-10 10-13 13-39 39-4 4-25 25-1	Ruta 5 1-7 7-2
		Ruta 2 1-19 19-35 35-23 23-22 22-24 24-18 18-37 37-12 12-27 27-1	Ruta 6 2-16 16-14 14-31
		Ruta 3 1-21 21-9 9-8 8-5 5-17 17-11 11-28 28-33 33-1	
		Ruta 4 1-32 32-15 15-3 3-20 20-34 34-26	

		26-36 36-38 38-1	
--	--	------------------	--

Modelo teniendo en cuenta 39 clientes y 6 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 4 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

FO:552

Tabla 12. CVRPPC_P_40_k5

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_40_k5	4	Ruta 1 1-6 6-28 28-9 9-32 32-27 27-8 8-24 24-25 25-7 7-1	Ruta 5 1-12 12-17
		Ruta 2 1-18 18-38 38-16 16-34 34-40 40-11 11-31 31-35 35-10 10-39 39-1	Ruta 6 17-13
		Ruta 3 1-19 19-5 5-20 20-14 14-26 26-15 15-1	Ruta 7 13-29
		Ruta 4 1-33 33-3 3-22 22-30 30-21 21-36 36-37 37-4 4-23 23-2 2-1	

Modelo teniendo en cuenta 40 clientes y 5 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 4 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

Tabla 13. CVRPPC_P_45_k5

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_45_k5	4	Ruta 1 1-8 8-44 44-42 42-14 14-26 26-15 15-1	Ruta 5 1-28 28-2 2-4 4-19 19-33 33-3
		Ruta 2 1-10 10-35 35-31 31-11 11-40 40-34 34-16 16-38 38-18 18-13 13-1	
		Ruta 3 1-12 12-17 17-30 30-22 22-5 5-45 45-43 43-41 41-20 20-25 25-24 24-7 7-1	
		Ruta 4 1-36 36-37 37-21 21-23 23-9 9-27 27-32 32-29 29-39 39-6 6-1	

Modelo teniendo en cuenta 45 clientes y 5 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos ppropios con un valor maxim3 de 4 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

Tabla 14. CVRPPC_P_50_k7

Caso	k	Rutas propias	Rutas subcontratadas
CVRPPC_P_50_k7	5	Ruta 1 1-7 7-2 2-29 29-23 23-43 43-42 42-44 44-24 24-17 17-1	Ruta 6 1-10 10-33 33-19
		Ruta 2 1-8 8-36 36-15 15-20 20-9 9-47 47-35 35-1	Ruta 7 19-25
		Ruta 3 1-18 18-27 27-11 11-39 39-12 12-1	Ruta 8 25-26
		Ruta 4 1-28 28-14 14-16 16-21 21-37 37-48 48-22 22-3 3-1	Ruta 9 26-38
		Ruta 5 1-34 34-5 5-31 31-49 49-6 6-30 30-1	Ruta 10 38-40 40-32
			Ruta 11 32-41 41-13
			Ruta 12 13-45
			Ruta 13 45-46
			Ruta 14 46-50 50-4

Modelo teniendo en cuenta 50 clientes y 7 vehiculos, de los cuales se asigno una restricci3n para limitar los vehiculos pppropios con un valor maxim3 de 5 rutas propias y se dej3 abierto para las rutas subcontratadas.

10.4 Minimización del número emisiones

Tabla 15. Minimización de emisiones ambientales

Caso	k	Q	W	Costo de emisiones	Costo de operación	FO	Tiempo (s)	GAP
CVRPPC_P_16_k8	6	35	2460	14,42	466	1062,66	6	0,00%
CVRPPC_P_19_k2	1	160	3100	9,66	312	1072,97	1	0,00%
CVRPPC_P_20_k2	1	160	3100	10,42	338	1162,4	461	0,00%
CVRPPC_P_21_k2	1	160	2980	10,09	326	1121,13	1	0,00%
CVRPPC_P_22_k2	1	160	3080	10,28	332	1141,77	1	0,00%
CVRPPC_P_22_k8	5	3000	22500	20,43	660	2269,85	1	1,32%
CVRPPC_P_23_k8	5	40	3130	17,7	572	1967,21	13	0,16%
CVRPPC_A_32_k5	3	100	4100	30,02	970	3335,94	8	0,96%
CVRPPC_A_33_k5	3	100	4460	26,31	850	2923,19	8	0,00%
CVRPPC_A_39_k6	4	100	5260	3611	1050	3611	4	0,09%
CVRPPC_P_40_k5	4	140	6180	21,84	694	2386,66	6	0,14%
CVRPPC_P_45_k5	4	150	6920	24,02	776	2668,66	9	0,00%
CVRPPC_P_50_k7	5	150	9510	24,58	794	2730,56	101	2,11%

En la tabla 15., se pueden evidenciar los resultados arrojados por el AMPL, de las instancias con las cuales se trabajó, los cuales muestran la optimalidad de cada modelo al reducir únicamente el número de emisiones, sin tener en cuenta el costo de operación que se pudiera generar. Aclarando que se hizo uso de las mismas condiciones de los resultados anteriores.

10.5 Metodología de Pareto

Para optimizar simultáneamente costos de operación y número de emisiones, se consideraron restricciones con base a resultados óptimos para dar un límite al modelo que proporcionara soluciones de muy buena calidad.

Tabla 16. Resultado de Frente de Pareto reduciendo costos y emisiones

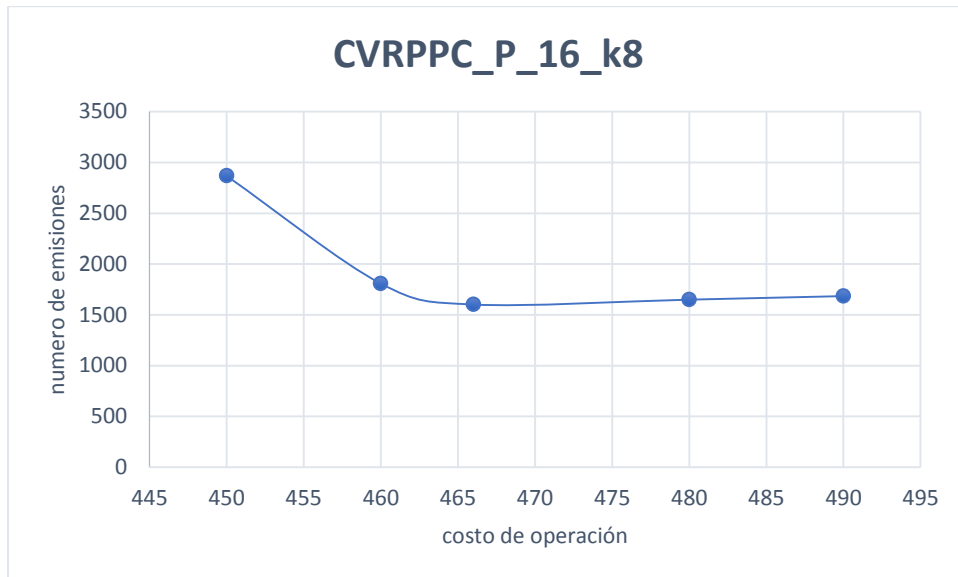
CASO	COSTOS								
	k	Q	W	operación	emisiones	número de emisiones	FO	Tiempo (s)	GAP
CVRPPC_P_16_K8	6	35	2460	466	14,42	1602,66	840	6	0,72%
CVRPPC_P_19_K2	1	160	3100	255	9,66	1272,41	266	127	0,77%
CVRPPC_P_20_K2	1	160	3100	266	12,19	1354,97	278	461	0,98%
CVRPPC_P_21_K2	1	160	2980	326	10,09	1121,13	366,09	1	5,59%
CVRPPC_P_22_K2	1	160	3080	332	10,28	1141,77	342,28	1	0,00%
CVRPPC_P_22_K8	5	3000	22500	660	20,43	2269,85	680,43	5	1,60%
CVRPPC_P_23_K8	5	40	3130	572	17,7	1967,21	589,7	100	4,90%
CVRPPC_A_32_K5	3	100	4100	970	30,02	3335,94	1000	36	0,09%
CVRPPC_A_33_K5	3	100	4460	850	26,31	2923,19	876,31	100	4,59%
CVRPPC_A_39_K6	4	100	5260	1050	32,5	3611	1082,5	61	0,83%
CVRPPC_P_40_K5	4	140	6180	694	21,48	2386,66	715,48	69	0,36%
CVRPPC_P_45_K5	4	150	6920	807	38,07	4229,87	845,07	100	38,28%
CVRPPC_P_50_K7	5	150	9510	1181	50,88	5653,56	1231,88	100	54,71%

En la tabla 16., se da un panorama más globalizado de cada una de las instancias, para las cuales se utilizó la metodología de Pareto, ya que el problema puede responder simultáneamente a la minimización de emisiones y costo de operación.

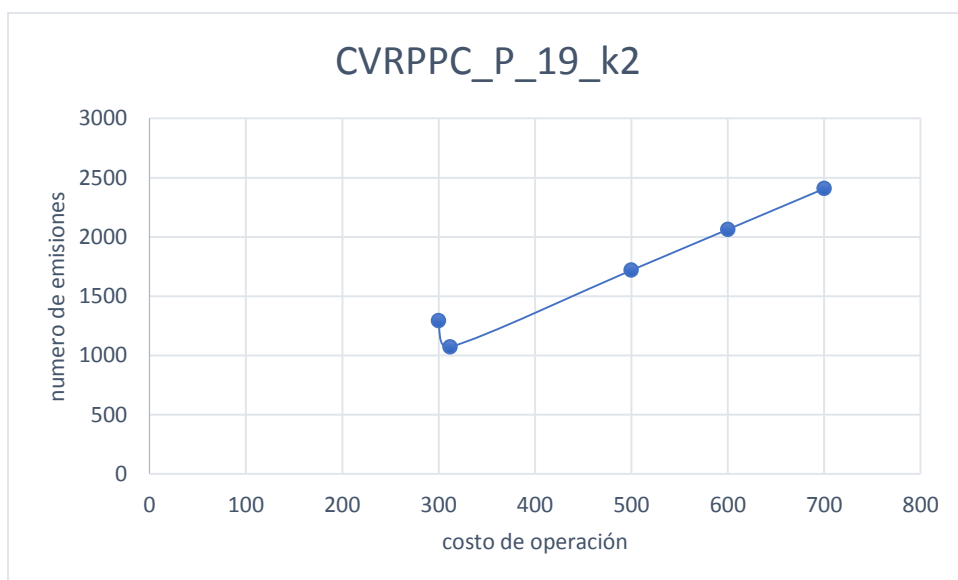
Para este caso se pudo notar que los costos de operación aumentan con respecto a los resultados obtenidos al tener en cuenta únicamente el costo de operación y dejando a un lado la reducción de emisiones, sin embargo, los resultados de los costos operativos a nivel general no aumentan en cantidades exorbitantes, además se obtiene un resultado multiobjetivo en cual se reducen los factores muy importantes para los problemas de ruteo.

10.6 Graficas de frente de Pareto

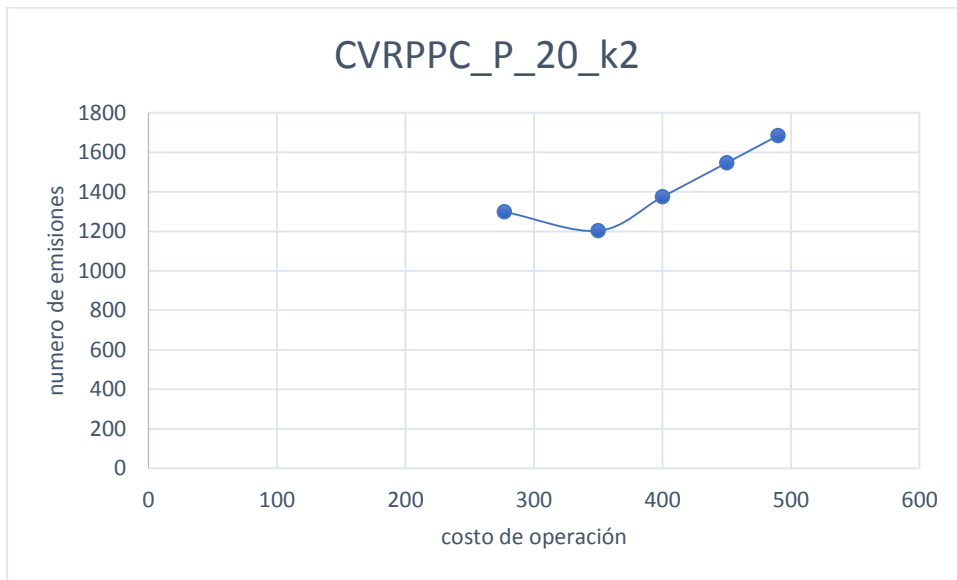
Gráfica 1. frente de Pareto_P_16_k8



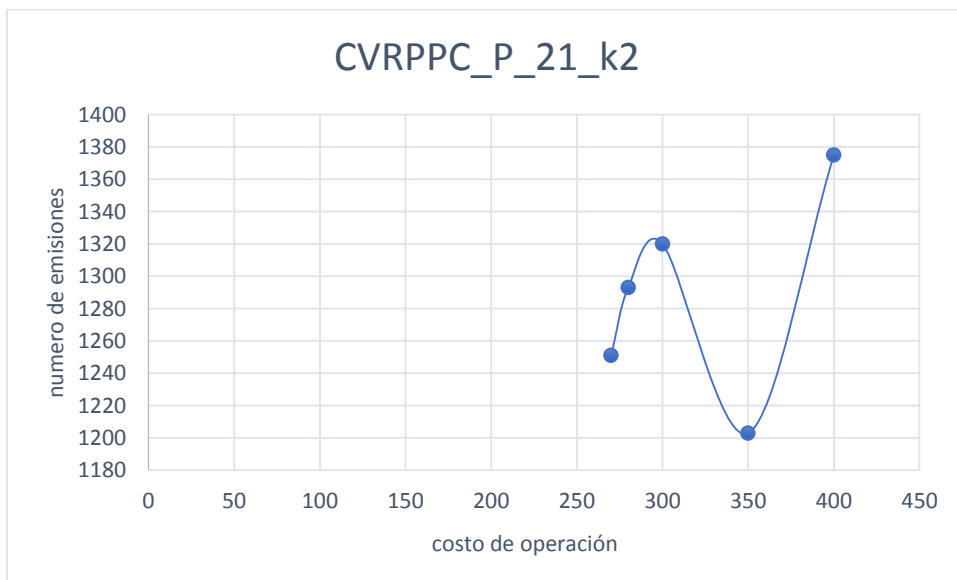
Gráfica 2. frente de Pareto_P_19_k2



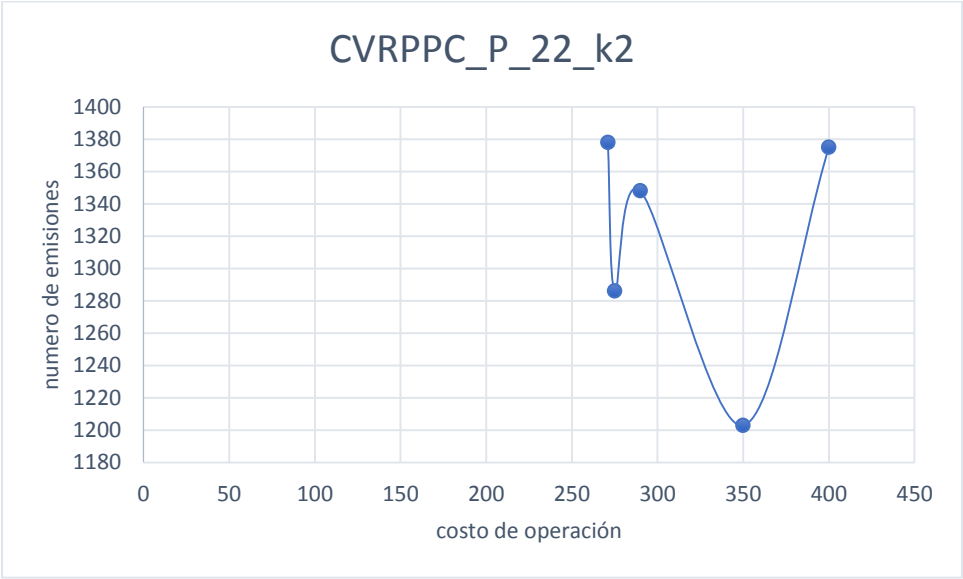
Gráfica 3. frente de Pareto_P_20_k2



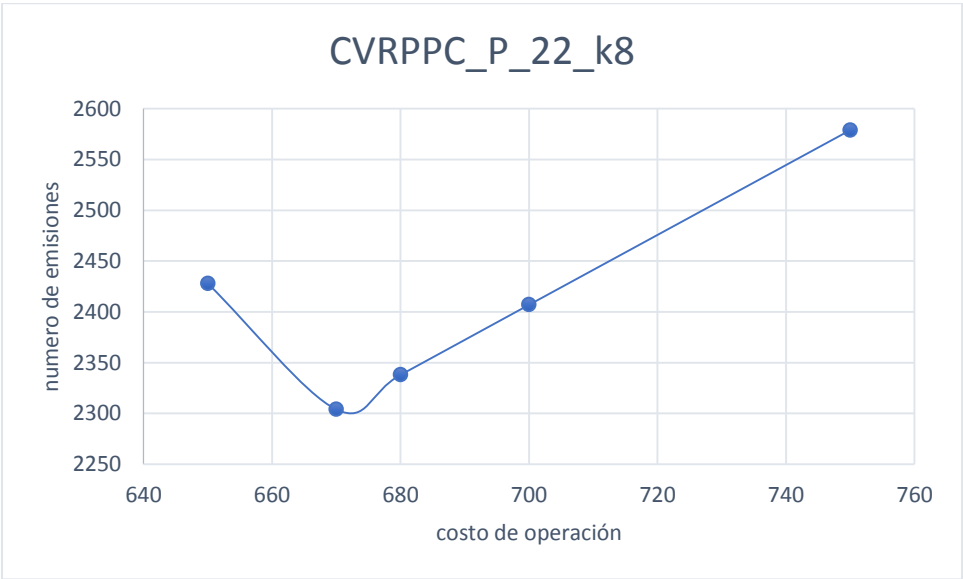
Gráfica 4. frente de Pareto_P_21_k2



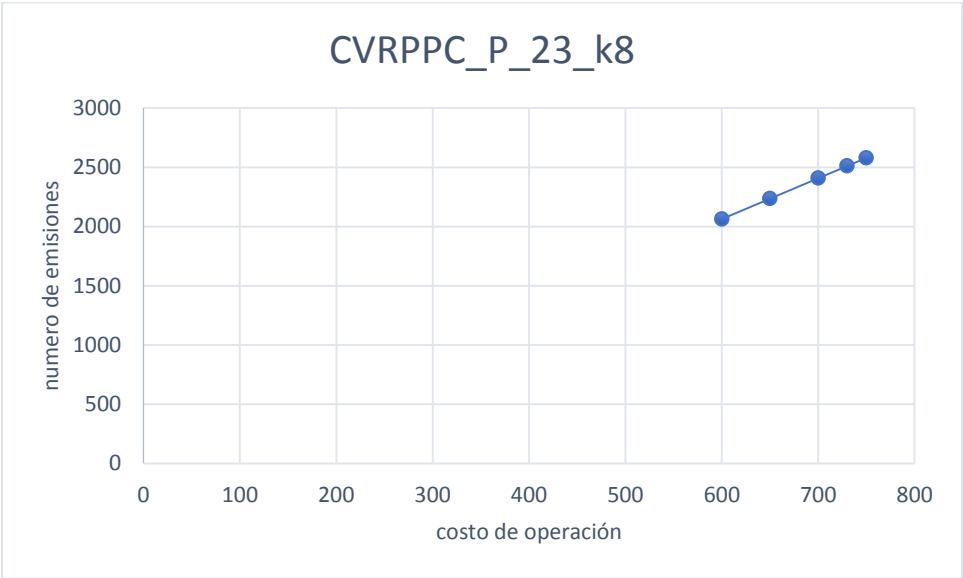
Gráfica 5. frente de Pareto_P_22_k2



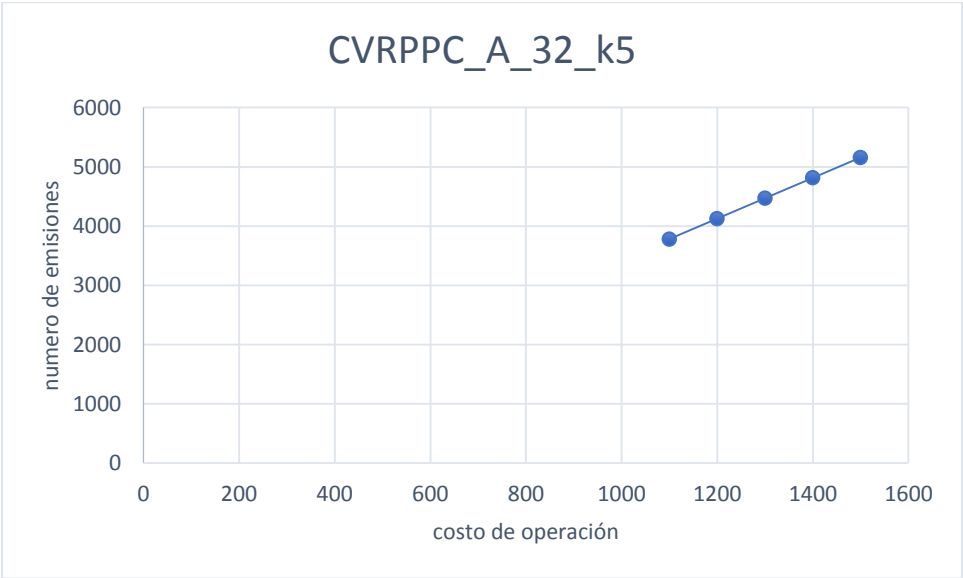
Gráfica 6. frente de Pareto_P_22_k8



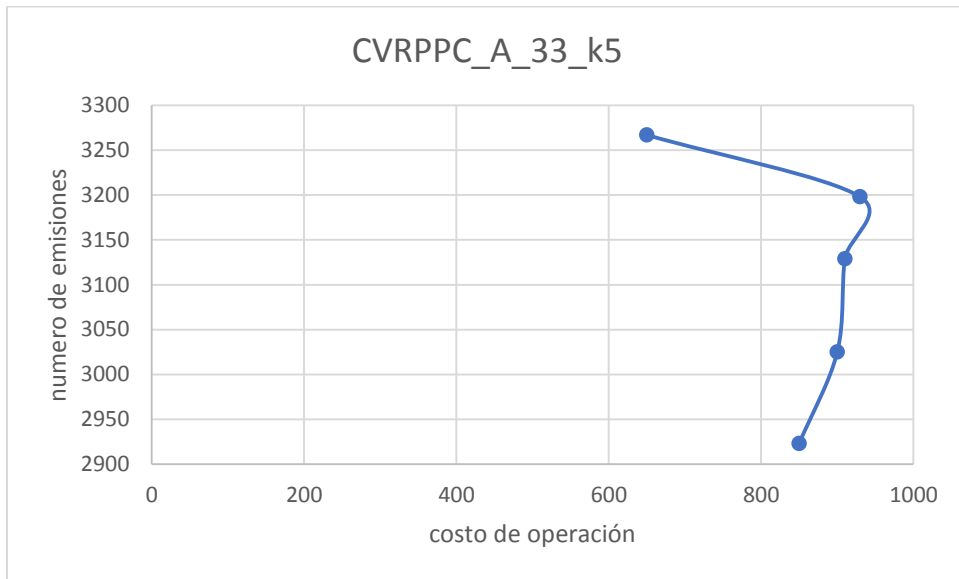
Gráfica 7. frente de Pareto_P_23_k8



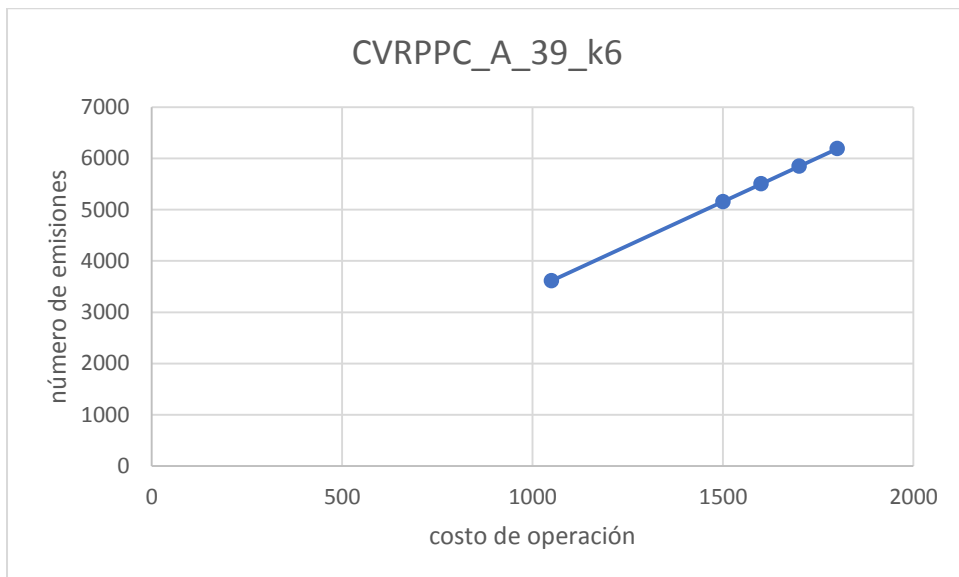
Gráfica 8. frente de Pareto_A_32_k5



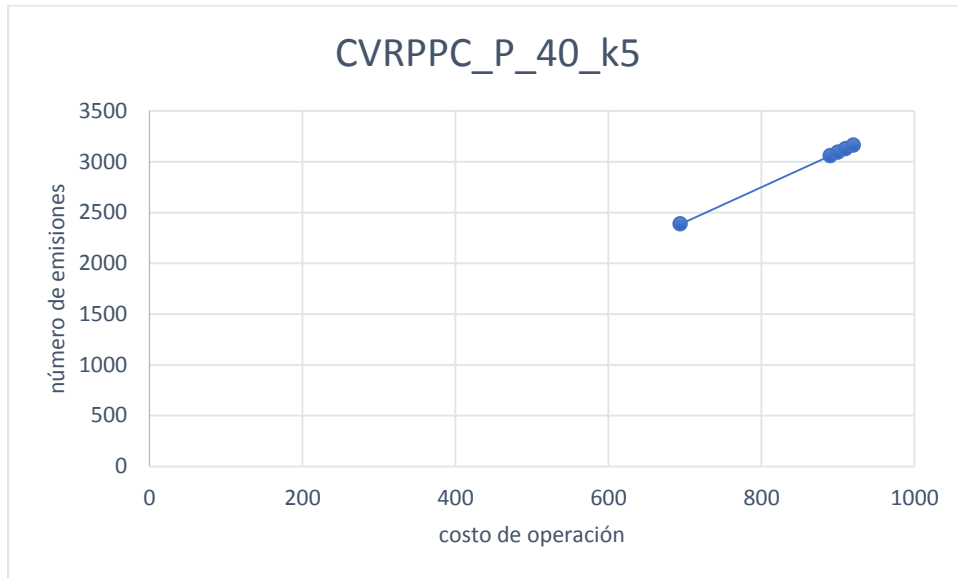
Gráfica 9. frente de Pareto_A_33_k5



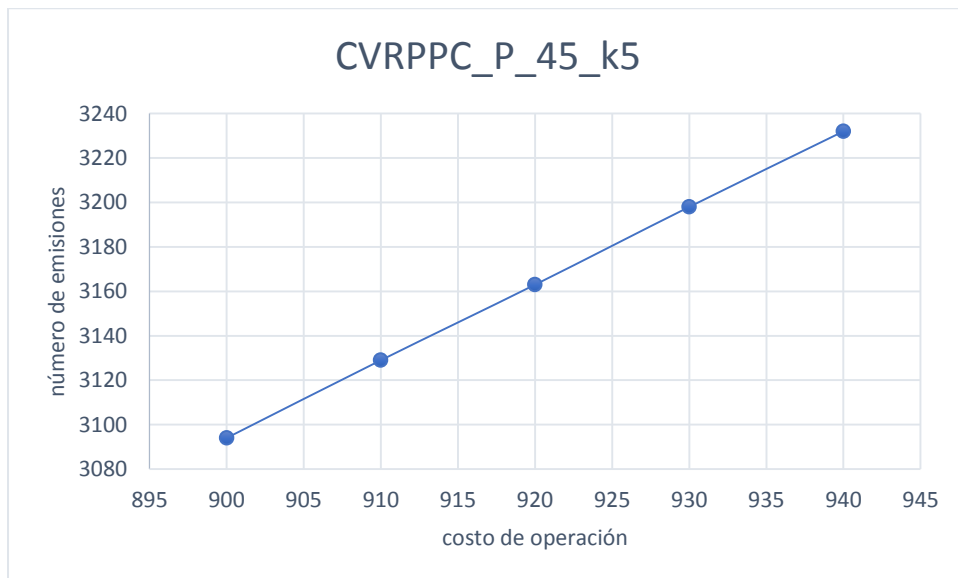
Gráfica 10. frente de Pareto_A_39_k6



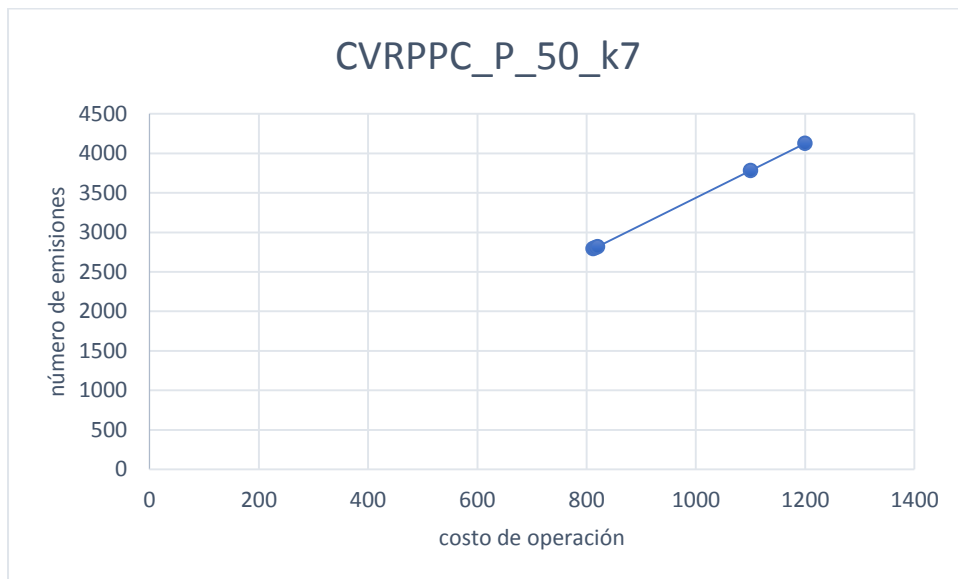
Gráfica 11.frente de Pareto_P_40_k5



Gráfica 12.frente de Pareto_P_45_k5



Gráfica 13.frente de Pareto_P_50_k7



11.Conclusiones

En el trabajo desarrollado se hizo una revisión de algunos antecedentes del problema de ruteo, logrando un acercamiento a las teorías pertinentes para la temática tratada. En este sentido, se usó un modelo matemático, flexible y amplio, el cual puede ser usado para las diferentes variaciones del problema de ruteo de vehículos capacitado (CVRP). El modelo, puede ser adaptado a diversas situaciones o contextos, haciendo un uso apropiado de las variables, según los requerimientos de cada caso.

Por otra parte, se hizo una retroalimentación de diferentes técnicas utilizadas, para la solución de problemas de ruteo de vehículos capacitado y sus variantes, proporcionando una profundización de la utilización de las mismas, según las exigencias de los problemas y la dificultad matemática que cada situación proponga.

También, se hizo una apropiación de un modelo matemático multiobjetivo para ejecutar los casos de las instancias de Augerat 1995 en un lenguaje de programación de AMPL, el cual permitió hacer el desarrollo de los casos estudiados, obteniendo respuestas de muy buena calidad. Sin embargo, en algunos casos se presentaron tiempos de corridas que se podrían reducir, al utilizar otro tipo de programas de optimización.

Finalmente, se logró evidenciar que las instancias utilizadas, arrojaron resultados significativos, ya que, al aplicar la metodología de Pareto, se disminuyó tanto los costos de operación, como el número de emisiones.

Esta metodología de Pareto logró demostrar que con una modelación multiobjetivo, los costos de operación aumentan en un porcentaje no mayor al 5% cuando se reducen al

máximo el número de emisiones, es decir, que, mitigando emisiones ambientales, se puede lograr también una disminución de costos.

Por último, se puede resaltar, que para estudios académicos o para situaciones de empresas que no cuenten con demasiados clientes, el programa AMPL puede ser muy útil, ya que permite una optimización que conlleva a mejorar factores, y proponer posibles cambios para hacer procesos eficientes y proporcionar menores costos operativos o contaminaciones ambientales.

Capítulo IV

11. Bibliografías

Access, Open. 2005. “Hiperheurísticas a Través de Programación Genética Para La Resolución de Problemas de Ruteo de Vehículos-Edición Única Hiperheurísticas a Través de Programación Genética Para La Resolución de Problemas de Ruteo de Vehículos.”

Brajas, Wilson. 2009. “Desarrollo de Un Algoritmo Heurístico Para Establecer Las Rutas de Transporte Escolar de La Secretaría de Educación de Bogotá,” 104.

Cardozo, Juan Pablo Orrego. 2013. “Solución Al Problema De Ruteo De Vehículos Con Capacidad Limitada ‘Cvrp’ a Través De La Heurística De Barrido Y La Implementación Del Algoritmo Genético De Chu-Beasley,” 1–69.

Castro, Sandra. 2014. “Revisión Del Estado Del Arte Del Problema De Enrutamiento De Vehículos Con Restricción De Capacidad, Cvrp, Involucrado En La Administración De La Cadena De Suministro.”
<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/4287/1/5196C355.pdf>.

Correa Espinal, Alexander Alberto, Juan Miguel Cogollo Flórez, and Juan Carlos Salazar López. 2011. “Aplicación de La Teoría de Grafos En La Solución de Problemas Con Impacto Ambiental.” *Producción + Limpia* 6 (1):9–20.

Daza, Julio Mario, Jairo R. Montoya, and Francesco Narducci. 2009. “Resolución de Problema de Enrutamiento de Vehículos Con Limitaciones de Capacidad Utilizando Un Procedimiento Metaheurístico de Dos Fases.” *Eia* 1 (12):23–38.

Garc, Irma Delia. n.d. “‘Noma de Nuevo León’ Universidad Autónoma de Nuevo León.”

González, Guillermo, and Felipe González. 2007. “Metaheurísticas Aplicadas Al Ruteo de Vehículos. Un Caso de Estudio. Parte 2: Algoritmo Genético, Comparación Con Una Solución Heurística.” *Revista Ingeniería E Investigación* 27 (1):149–57.

Herazo, Nilson. 2012. “Modelación Matemática Del Problema de Ruteo de Vehículos Con Restricciones de Múltiples Depósitos, Flota Heterogénea de Vehículos Y Ventanas de Tiempos.”
<http://repositorio.cuc.edu.co/xmlui/bitstream/handle/11323/90/1129495709.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

Lüer, Armin, Magdalena Benavente, Jaime Bustos, and Bárbara Venegas. 2009. "El Problema de Rutas de Vehículos: Extensiones Y Metodos de Resolucion Estado Del Arte." *CEUR Workshop Proceedings* 558.

Olivera, Alfredo. 2004. "Heurísticas Para Problemas de Ruteo de Vehículos." *Instituto de Computacion - Facultad de Ingenieria*.
<https://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf>.

Toro-ocampo, Eliana M. 2016. "Solución Del Problema de Localización Y Ruteo Usando Un Modelo Matemático Flexible Y Considerando Efectos Ambientales," 174.

ALONSO, F., ALVAREZ, M., BEASLEY, J., 2007. *A tabu search algorithm for the periodic vehicle routing problem with multiple vehicle trips and accessibility restrictions*. Journal of the Operational Research Society. Volume 59, pages 963-976.

ANGEL, J. C., SOLER, D., HERVAS, A. 2002. *The capacitated general routing problem on mixed graphs*. Revista investigación operacional, volume 23, No. 1.

AUGERAT, P., BELENGUER, J.M., BENAVENT, E., CORBERAN, A., NADDEF, D., RINALDI, G., 1998. *Computational Results with a Branch and Cut Code for the Capacitated Vehicle Routing Problem*. Research Report 949-M, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

BELENGUER, J., MARTINEZ, M., MOTA, E., 2000. *A lower bound for the split-delivery vehicle routing problem*. Operations Research: A journal of the institute for operations research and the management sciences. Volume 48, issue 5, pages 801-810.

BENT, R., HENTENRYCK, P., 2004. *A two-stage hybrid local search for the vehicle routing problem with time windows*. Transportation Science: A journal of the institute for operations research and the management sciences. Volume 38, issue 4, pages 515-530.

BERGER, J., BARKAOUI, M. 2003. *A hybrid genetic algorithm for the capacitated vehicle routing problem*. Genetic and evolutionary computation – GECCO, volume 1, pages 646-656.

BERTSIMAS, D., RYZIN, G., 1991. *A stochastic and dynamic vehicle routing problem in the Euclidean plane*. Operations Research: A journal of the institute for operations research and the management sciences. Volume 39, issue 4, pages 601-615.

BIANCHESSI, N., RIGHINI, G., 2007. *Heuristics algorithms for the vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery*. Computers & Operations Research. Volume 34, issue 2, pages 578-594.

BLASUM, U., HOCHSTATTLER, W., 2000. *Application of the Branch and Cut Method to the Vehicle Routing Problem*. Zentrum für Angewandte Informatik Köln Technical Report.Zpr2000-386.

BRANDÃO, J., 2006. *A new tabu search algorithm for the vehicle routing problem with backhauls*. European Journal of Operational Research. Volume 173, issue 2, pages 540-555.
CHEN, A-L., YANG, G-K., WU, Z-M. 2006. *Hybrid discrete particle swarm optimization algorithm for capacitated vehicle routing problem*. Journal of Zhejiang University SCIENCE A, volume 7, issue 4, pages 607-614.

CHEN, S., GOLDEN, B., WASIL, E., 2007.*The split-delivery vehicle routing problem: Applications, algorithms, test problems, and computational results*. Networks: An international journal. Volume 49, issue 4, pages 318-329. 65

CHRISTOFIDES, N., EILON, S., 1969.*An Algorithm for the Vehicle Dispatching Problem*.Operational Research Quarterly. Volume 20, pages 309-318.

CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A., TOTH, P., 1979. *The Vehicle Routing Problem*.In: Combinatorial Optimization (CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A., TOTH, P. and SANDI, C., editors). Chichester: John Wiley & Sons Ltd. Pages 315-338.

CHU, P. C., BEASLEY, J. E., 1997. *A Genetic Algorithm for the Generalized Assignment Problem*. Computers & Operations Research. Volume 24, issue 1, pages 17-23.

CORDEAU, J. F., GENDREAU, M., HERTZ, A., LAPORTE, G., SORMANY, J. S., 2004. *New heuristics for the vehicle routingproblem*. Les cahiers du GERAD.

CORNUEJOLS, Gerard., HARCHE, Farid. 1993. *Polyhedral study of the capacitated vehicle routing problem*. Mathematical Programming, volume 60, issue 1-3, pages 21-52.

CREVIER, B., CORDEAU, J-F., LAPORTE, G., 2007.*The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes*. European Journal of Operational Research. Volume 176, issue 2, pages 756-773.

DAZA, J. M., MONTOYA, J.R., NARDUCCI, F. 2009. *Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases*. Revista EIA, No. 12, páginas 23-38.

DETHLOFF, J., 2001. *Vehicle routing and reverse logistics: The vehicle routing problem with simultaneous delivery and pick-up*. OR-Spektrum. Volume 23, issue 1, pages 79-96.

DROR, M., TRUDEAU, P., 1986.*Stochastic vehicle routing with modified savings algorithm*. European Journal of Operational Research. Volume 23, issue 2, pages 228-235.

DRUMMOND, L., OCHI, L., VIANNA D., 2001. *An asynchronous parallel metaheuristic for the period vehicle routing problem*. Future Generation Computer Systems. Volume 17, issue 4, pages 379-386.

RESENDE, Mauricio. 2011. BiasedRandom-Key Genetic Algorithms With Applications In Telecommunications. AT&T Labs Research Technical Report. Pages 1-6.

SHAW, P., 1998. Using Constraint Programming and Local Search Methods to Solve Vehicle Routing Problems. Memorias de "Proceedings of the Fourth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming". pp. 417-431.

SOTO, M, José, A., (2011). Fundamentos teóricos de simulación discreta. Texto guía Maestría en investigación operativa y estadística. Facultad de ingeniería industrial. Universidad Tecnológica de Pereira.

SPEARS, W. M., DE JONG, K. A. 1991. On The Virtues of Parameterized Uniform Crossover. Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms, eds. R. Belew and L. Booker, San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 230-236.

TAILLARD, E., BADEAU, P., GENDREAU, M., GUERTIN, F., POTVIN, J-Y., 1997. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with soft time windows. Transportation Science: A journal of the institute for operations research and the management sciences. Volume 31, issue 2, pages 170-186.

TANIGUCHI, E., THOMPSON, R., 1999. Modeling city logistics. City Logistics 5, pp. 3–37.

TANIGUCHI, E., THOMPSON, R., 2002. Modeling city logistics. Transportation Research Record: Journal of the transportation research board, volume 1790, pp. 45-51.

TARANTILIS, C., KIRANOUDIS, C., VASSILIADIS, V., 2004. A threshold accepting metaheuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. European Journal of Operational Research. Volume 152, issue 1, pages 148-158.

TOTH, P., TRAMONTANI, A. 2008. An integer linear programming local search for capacitated vehicle routing problems. The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges, volume 2, pages 275-295.

TOTH, P., VIGO, D., 1997. An exact algorithm for the vehicle routing problem with backhauls. *Transportation Science: A journal of the institute for operations research and the management sciences*. Volume 31, issue 4, pages 372-385. 69

Using Genetics Algorithm. 16th Internacional Conference on CAD/CAM Robotic & Factories of the Future, Trinidad y Tobago, Junio 2000.

GALLEGO, R, Ramón., ESCOBAR, Z, Antonio., TORO, O, Eliana., 2008. Técnicas metaheurísticas de optimización. Universidad Tecnológica de Pereira. Textos Universitarios, ISBN: 978-958-722-007-0, Ed. 2.

GALLEGO R, Ramón., ROMERO, L, Rubén., ESCOBAR, Z, Antonio. “Algoritmos Genéticos”, texto guía en Maestría en Ingeniería Eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira.

GENDREAU, M., LANGEVIN, A., FRAYRET, J, M., 2013. Notes du cours ‘Réseaux Logistiques’, séance 6 : Planification du transport par camions. École Polytechnique de Montréal.

GENDREAU, M., LAPORTE, G., MUSARAGANYI, C., TAILLARD, E., 1999. A tabu search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*. Volume 26, issue 12, pages 1153-1173.

GENDREAU, M., LAPORTE, G., POTVIN, J-Y., 2002. Metaheuristics for the capacitated VRP .The vehicle routing problem, volume 9 of SIAM monographs on discrete mathematics and applications, chapter 6.

GENDREAU, M., LAPORTE, G., SÉGUIN, R., 1996. Stochastic vehicle routing. *European Journal of Operational Research*. Volume 88, issue 1, pages 3-12.

GENDREAU, M., VIDAL, T., CRAINIC, T.G., PRINS, C., 2012. Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis. CIRRELT.

GILLET, B. E., MILLER, L. R., 1974. A Heuristic Algorithm for the Vehicle Dispatch Problem. *Operations Research*. Volume 22, pages 340-349.

GOLDEN, B., LI, F., WASIL, E., 2007. A record-to-record travel algorithm for solving the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*. Volume 34, issue 9, pages 2734-2742.

GONZÁLEZ, G., GONZÁLEZ F., 2006. Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: Formulación del problema. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. *Ingeniería e Investigación*. Vol. 26, número 003, pp. 149-156.

HEMMELMAYR, V., DOERNER, K., HARTL, R., 2009. A variable neighborhood search heuristic for periodic routing problems. *European Journal of Operational Research*. Volume 195, issue 3, pages 791-802. 67

HERTZ, A., ARCHETTI, C., SPERANZA, M., 2006. A tabu search algorithm for the Split-delivery vehicle routing problem. *Transportation Science: A journal of the institute for operations research and the management sciences*. Volume 40, issue 1, pages 64-73.

MONTANÉ, F., GALVAO, D., 2006. A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery service. *Computers & Operations Research*. Volume 33, issue 3, pages 595-619.

NEO Research Group. <http://neo.lcc.uma.es/vrp/vrp-instances/>

OSMAN, I., WASSAN, N., 2002. A reactive tabu search meta-heuristic for the vehicle routing problem with back-hauls. *Journal of Scheduling*. Volume 5, issue 4, pages 263-285.

PAPADIMITRIOU, Christos, H., (1982). *Combinatorial Optimization*. Prentice Hall. 68

TOTH, P., VIGO, D., 2000. An Overview of Vehicle Routing Problems, *Monographs on Discrete Mathematics and Applications*. In: *The Vehicle Routing Problem*. SIAM, 2000, pp. 1-26.

VENKATESAN, S.R., LOGENDRAN, D., CHANDRAMOHAN, D. 2011. Optimization of capacitated vehicle routing problem using PSO. *International Journal of Engineering Science and Technology*, volume 3, number 10, pages 7469-7477.

WU, T-H., LOW, C., BAI, J-W., 2002. Heuristics solutions to multi-depot location-routing problems. *Computers & Operations Research*. Volume 29, issue 10, pages 1393-1415. XIAO,

J., LU, B., 2012. Vehicle routing problem with soft time windows. *Advances in Computer Science and Information Engineering*. Volume 168, pages 317-322.

FUKASAWA, R., POGGI DE ARAGAO, M., REIS, M., UCHOA, E., 2003. Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Vehicle Routing Problem. *Relatorios de Pesquisa em Engenharia de Producao. RPEP Vol. 3 No. 8*.

DUARTE, Abraham. 2007. *Metaheurísticas*. Librería-Editorial Dykinson. Volumen 22 de Ciencias Experimentales y Tecnología.

FISHER, M. 1994. Optimal Solution of Vehicle Routing Problems Using Minimum k-Trees. *Operations Research*. Volume 42, no. 4, pages 626-642.

FRANCIS, P., SMILOWITZ, K., 2006. Modeling techniques for periodic vehicle routing problems. *Transportation Research Part B: Methodological*. Volume 40, issue 10, pages 872-884. 66

PRINS, Christian. 2004. A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, volume 31, issue 12, pages 1985-2002.

RALPHS, T.K., KOPMAN, L., PULLEYBLANK, W.R., TROTTER JR, L.E., 2001. On the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Mathematical Programming Series.B* 94, 343.

RENAUD, J., LAPORTE, G., BOCTOR, F., 1996. A tabu search heuristics for the multi-depot vehicle routing problem. *Computers& Operations Research*. Volume 23, issue 3, pages 229-235.

FUKASAWA, R., POGGI DE ARAGAO, M., REIS, M., UCHOA, E., 2003. Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Vehicle Routing Problem. *Relatorios de Pesquisa em Engenharia de Producao. RPEP Vol. 3 No. 8*.

DUARTE, Abraham. 2007. *Metaheurísticas*. Librería-Editorial Dykinson. Volumen 22 de Ciencias Experimentales y Tecnología.

FISHER, M. 1994. Optimal Solution of Vehicle Routing Problems Using Minimum k-Trees. *Operations Research*. Volume 42, no. 4, pages 626-642.

FRANCIS, P., SMILOWITZ, K., 2006. Modeling techniques for periodic vehicle routing problems. *Transportation Research Part B: Methodological*. Volume 40, issue 10, pages 872-884. 66

PRINS, Christian. 2004. A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, volume 31, issue 12, pages 1985-2002.

RALPHS, T.K., KOPMAN, L., PULLEYBLANK, W.R., TROTTER JR, L.E., 2001. On the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Mathematical Programming Series.B* 94, 343.

RENAUD, J., LAPORTE, G., BOCTOR, F., 1996. A tabu search heuristics for the multi-depot vehicle routing problem. *Computers& Operations Research*. Volume 23, issue 3, pages 229-235.